

Estudio de la evolución orbital de Fobos debido a la interacción de mareas y su relación con las propiedades físicas de Marte

Luna, S. H. ^{1,2} Navone, H. D. ^{1,3} Melita, M. D. ²

¹ Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario.

² Instituto de Astronomía y Física del Espacio (IAFE). CONICET – Universidad De Buenos Aires.

³ Instituto de Física de Rosario (IFIR). CONICET – Universidad Nacional de Rosario.

60^o Reunión Anual de la Asociación Argentina de Astronomía

Consideraciones preliminares

Consideraciones preliminares

- Problema de los dos cuerpos, considerando la forma de uno de ellos (primario).

Consideraciones preliminares

- Problema de los dos cuerpos, considerando la forma de uno de ellos (primario).
- El potencial gravitatorio del primario cambia debido a la deformación producida por el campo de fuerzas generado por el secundario

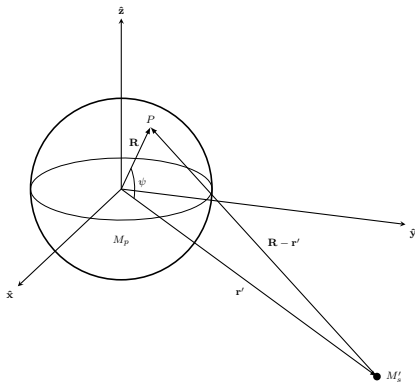
Consideraciones preliminares

- Problema de los dos cuerpos, considerando la forma de uno de ellos (primario).
- El potencial gravitatorio del primario cambia debido a la deformación producida por el campo de fuerzas generado por el secundario y, al mismo tiempo, su órbita se ve perturbada por dicho efecto.

Consideraciones preliminares

- Problema de los dos cuerpos, considerando la forma de uno de ellos (primario).
- El potencial gravitatorio del primario cambia debido a la deformación producida por el campo de fuerzas generado por el secundario y, al mismo tiempo, su órbita se ve perturbada por dicho efecto.
- Simultáneamente aparece el conocido torque de mareas que también modifica la velocidad de rotación del primario.

Considérese un sistema de referencia planetocéntrico y sean \mathbf{R} y \mathbf{r}' los vectores de posición de un punto de la superficie del planeta y del satélite, respectivamente.



Puede mostrarse que el potencial generado en el punto \mathbf{R} por el satélite —modelado como una masa puntual—, ubicado en \mathbf{r}' , puede escribirse (Efroimsky & Williams, 2009):

$$W(\mathbf{R}, \mathbf{r}') = -\mathcal{G}M'_s \left[\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3} \right] \quad (1)$$

Puede mostrarse que el potencial generado en el punto \mathbf{R} por el satélite —modelado como una masa puntual—, ubicado en \mathbf{r}' , puede escribirse (Efroimsky & Williams, 2009):

$$W(\mathbf{R}, \mathbf{r}') = -\mathcal{G}M'_s \left[\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3} \right] \quad (1)$$

El lado derecho de la Ec. (1) puede expandirse en términos de los polinomios de Legendre y de sus funciones asociadas, teniendo en cuenta que $R < r'$. De forma general, la Ec. (1) puede reescribirse:

$$W(\mathbf{R}, \mathbf{r}') = \sum_{l=2}^{\infty} W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}') \quad (2)$$

Puede mostrarse que el potencial generado en el punto \mathbf{R} por el satélite —modelado como una masa puntual—, ubicado en \mathbf{r}' , puede escribirse (Efroimsky & Williams, 2009):

$$W(\mathbf{R}, \mathbf{r}') = -\mathcal{G}M'_s \left[\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3} \right] \quad (1)$$

El lado derecho de la Ec. (1) puede expandirse en términos de los polinomios de Legendre y de sus funciones asociadas, teniendo en cuenta que $R < r'$. De forma general, la Ec. (1) puede reescribirse:

$$W(\mathbf{R}, \mathbf{r}') = \sum_{l=2}^{\infty} W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}') \quad (2)$$

donde

$$W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}') = \frac{\mathcal{G}M'_s}{r'} \left(\frac{R}{r'} \right)^l \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \times P_{lm}(\sin \lambda) P_{lm}(\sin \lambda') \cos m(\varphi - \varphi') \quad (3)$$

Para obtener la expresión del potencial de mareas, son necesarias las siguientes

Para obtener la expresión del potencial de mareas, son necesarias las siguientes

Hipótesis fundamentales

- Cada término del desarrollo en serie de Fourier del potencial generado por el planeta es proporcional al correspondiente término del desarrollo de Fourier del potencial perturbador.

Para obtener la expresión del potencial de mareas, son necesarias las siguientes

Hipótesis fundamentales

- Cada término del desarrollo en serie de Fourier del potencial generado por el planeta es proporcional al correspondiente término del desarrollo de Fourier del potencial perturbador.
- Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones son lineales.

Para obtener la expresión del potencial de mareas, son necesarias las siguientes

Hipótesis fundamentales

- Cada término del desarrollo en serie de Fourier del potencial generado por el planeta es proporcional al correspondiente término del desarrollo de Fourier del potencial perturbador.
- Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones son lineales.
- El principio de correspondencia elástica-viscoelástica es válido.

Para obtener la expresión del potencial de mareas, son necesarias las siguientes

Hipótesis fundamentales

- Cada término del desarrollo en serie de Fourier del potencial generado por el planeta es proporcional al correspondiente término del desarrollo de Fourier del potencial perturbador.
- Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones son lineales.
- El principio de correspondencia elástica-viscoelástica es válido.
- La disipación de energía para cada frecuencia depende sólo de esa frecuencia.

La primera hipótesis se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{l=2}^{\infty} V_l(\mathbf{r}) \quad (4)$$

La primera hipótesis se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{l=2}^{\infty} V_l(\mathbf{r}) \quad (4)$$

donde

$$V_l(\mathbf{r}) = k_l \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1} W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}') \quad (5)$$

La primera hipótesis se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{l=2}^{\infty} V_l(\mathbf{r}) \quad (4)$$

donde

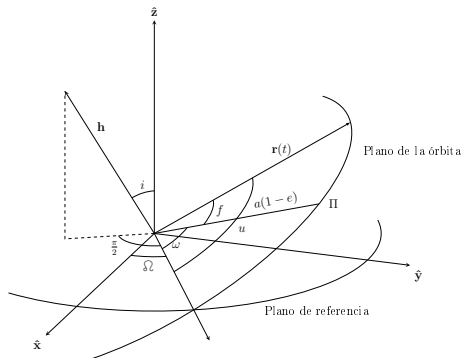
$$V_l(\mathbf{r}) = k_l \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1} W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}') \quad (5)$$

Además,

$$k_l = \frac{3}{2} \frac{1}{l-1} \frac{1}{1+A_l \mu} = \frac{3}{2} \frac{1}{l-1} \frac{J}{J+A_l}; \quad \mu = \frac{1}{J} \quad (6)$$

$$A_l = \frac{3(2l^2 + 4l + 3)}{4l \pi \mathcal{G} \rho^2 R^2} \quad (7)$$

A los fines de abordar este problema conviene expresar el en función de los elementos orbitales a , e , ω , i , $\delta\Omega$ y M . La transformación correspondiente fue desarrollada por Kaula (1961).



Entonces:

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{r}) = & \sum_{l=2}^{\infty} k_l \left(\frac{R}{a}\right)^{l+1} \frac{\mathcal{G}M'_s}{a'} \left(\frac{R}{a'}\right)^l \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \\
 & \times \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i') \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e') \sum_{h=0}^l F_{lmh}(i) \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_{lhj}(e) \\
 & \times \cos \left[(v'_{lmpq} - m\theta') - (v_{lmhj} - m\theta) \right]
 \end{aligned} \tag{8}$$

donde:

$$v'_{lmpq} = (l - 2p)\omega' + (l - 2p + q)M' + m\delta\Omega' \tag{9}$$

y

$$v_{lmhj} = (l - 2h)\omega + (l - 2h + j)M + m\delta\Omega \tag{10}$$

La expresión del potencial de mareas dada por la Ec. (8) corresponde a una respuesta elástica del planeta.

La expresión del potencial de mareas dada por la Ec. (8) corresponde a una respuesta elástica del planeta. Por lo tanto, resulta necesario “corregir” la respuesta del planeta debido a la anelasticidad del material que conforma al mismo:

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{r}) = & \sum_{l=2}^{\infty} k_l \left(\frac{R}{a}\right)^{l+1} \frac{\mathcal{G}M'_s}{a'} \left(\frac{R}{a'}\right)^l \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0,m}) \\
 & \times \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i') \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e') \sum_{h=0}^l F_{lmh}(i) \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_{lhj}(e) \\
 & \times \cos \left[(v'_{lmpq} - m\theta') - (v_{lmhj} - m\theta) \right]
 \end{aligned} \tag{11}$$

La expresión del potencial de mareas dada por la Ec. (8) corresponde a una respuesta elástica del planeta. Por lo tanto, resulta necesario “corregir” la respuesta del planeta debido a la anelasticidad del material que conforma al mismo:

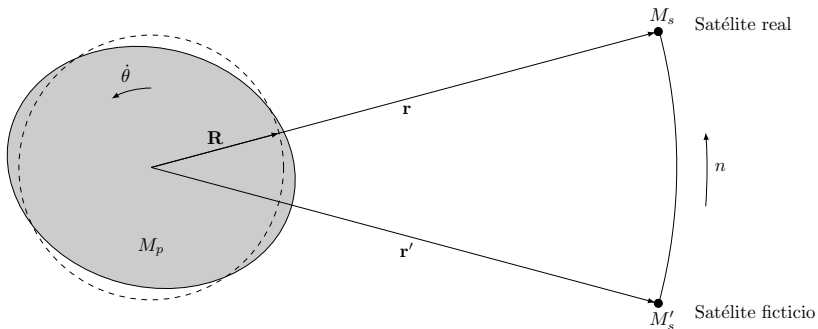
$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{r}) = & \sum_{l=2}^{\infty} k_l \left(\frac{R}{a}\right)^{l+1} \frac{\mathcal{G}M'_s}{a'} \left(\frac{R}{a'}\right)^l \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0,m}) \\
 & \times \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i') \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e') \sum_{h=0}^l F_{lmh}(i) \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_{lhj}(e) \\
 & \times \cos \left[(v'_{lmpq} - m\theta') - (v_{lmhj} - m\theta) - \epsilon_l \right]
 \end{aligned} \tag{11}$$

donde

$$\epsilon_l = \omega_{lmpq} \Delta t_l \tag{12}$$

siendo,

$$\omega_{lmpq} = (l - 2p)\dot{\omega} + (l - 2p + q)\dot{M} + m(\dot{\zeta} - \dot{\theta}) \tag{13}$$



A modo de ilustrar los conceptos fundamentales de la teoría de mareas, de caracterizar dicha interacción y realizar una primera aproximación al problema planteado, se van a considerar varias simplificaciones.

A modo de ilustrar los conceptos fundamentales de la teoría de mareas, de caracterizar dicha interacción y realizar una primera aproximación al problema planteado, se van a considerar varias simplificaciones.

- La inclinación del plano de la órbita de Fobos es muy baja, $i \simeq 0$ y, por lo tanto, puede despreciarse.

A modo de ilustrar los conceptos fundamentales de la teoría de mareas, de caracterizar dicha interacción y realizar una primera aproximación al problema planteado, se van a considerar varias simplificaciones.

- La inclinación del plano de la órbita de Fobos es muy baja, $i \simeq 0$ y, por lo tanto, puede despreciarse. En consecuencia, $\delta\Omega$ carece de sentido y solo dos de las funciones de la inclinación F_{lmp} son no nulas: $F_{201} = -1/2$ y $F_{220} = 3$.

A modo de ilustrar los conceptos fundamentales de la teoría de mareas, de caracterizar dicha interacción y realizar una primera aproximación al problema planteado, se van a considerar varias simplificaciones.

- La inclinación del plano de la órbita de Fobos es muy baja, $i \simeq 0$ y, por lo tanto, puede despreciarse. En consecuencia, $\delta\Omega$ carece de sentido y solo dos de las funciones de la inclinación F_{lmp} son no nulas: $F_{201} = -1/2$ y $F_{220} = 3$.
- Con respecto a la serie en q , dado que la excentricidad de la órbita de Fobos es también baja ($e = 0,0151$), es suficiente considerar los términos hasta e^7 , inclusive.

A modo de ilustrar los conceptos fundamentales de la teoría de mareas, de caracterizar dicha interacción y realizar una primera aproximación al problema planteado, se van a considerar varias simplificaciones.

- La inclinación del plano de la órbita de Fobos es muy baja, $i \simeq 0$ y, por lo tanto, puede despreciarse. En consecuencia, $\delta\Omega$ carece de sentido y solo dos de las funciones de la inclinación F_{lmpq} son no nulas: $F_{201} = -1/2$ y $F_{220} = 3$.
- Con respecto a la serie en q , dado que la excentricidad de la órbita de Fobos es también baja ($e = 0,0151$), es suficiente considerar los términos hasta e^7 , inclusive.
- Sólo se va a considerar el término correspondiente al componente principal de mareas (semi diurno, $lmpq = 2200$). Esto es:

$$\begin{aligned}
 V_{2200} = & \frac{3}{4} \frac{\mathcal{G}M'_s}{a'} \left(\frac{R}{a'}\right)^2 \left(\frac{R}{a}\right)^3 G_{200}(e') \sum_j G_{20j}(e) \\
 & \times (\cos[(2\omega' + 4M' - 2\theta') - (2\omega + (2+j)M - 2\theta)]) k_2 \cos \epsilon_{2200} \\
 & + \text{sen}[(2\omega' + 4M' - 2\theta') - (2\omega + (2+j)M - 2\theta)] k_2 \text{sen} \epsilon_{2200}
 \end{aligned} \tag{14}$$

En virtud de las Ecuaciones Planetarias de Lagrange, la evolución temporal del semieje mayor de la órbita de Fobos viene dado, en general, por:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \quad (15)$$

En virtud de las Ecuaciones Planetarias de Lagrange, la evolución temporal del semieje mayor de la órbita de Fobos viene dado, en general, por:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \quad (15)$$

Tal como se indicó anteriormente, sólo se va a estudiar el efecto de la componente principal de mareas, por lo tanto, la Ec. (15) toma la forma:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial V_{2200}}{\partial M} \quad (16)$$

En virtud de las Ecuaciones Planetarias de Lagrange, la evolución temporal del semieje mayor de la órbita de Fobos viene dado, en general, por:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \quad (15)$$

Tal como se indicó anteriormente, sólo se va a estudiar el efecto de la componente principal de mareas, por lo tanto, la Ec. (15) toma la forma:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial V_{2200}}{\partial M} \quad (16)$$

Siguiendo a Efroimsky & Williams (2009) , el potencial de mareas primero se debe derivar con respecto a M y luego imponer la condición de que cada uno de los elementos orbitales primados es igual a su contraparte no primada. Se obtiene como resultado:

En virtud de las Ecuaciones Planetarias de Lagrange, la evolución temporal del semieje mayor de la órbita de Fobos viene dado, en general, por:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \quad (15)$$

Tal como se indicó anteriormente, sólo se va a estudiar el efecto de la componente principal de mareas, por lo tanto, la Ec. (15) toma la forma:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial V_{2200}}{\partial M} \quad (16)$$

Siguiendo a Efroimsky & Williams (2009) , el potencial de mareas primero se debe derivar con respecto a M y luego imponer la condición de que cada uno de los elementos orbitales primados es igual a su contraparte no primada. Se obtiene como resultado:

$$\frac{\partial V_{2200}}{\partial M} = \frac{3}{4} \frac{GM_s R^5}{a^6} G_{200}(e) \sum_j G_{20j}(e) (2+j) (\text{sen}[-jM] k_2 \cos \epsilon_{220q} - \cos[-jM] k_2 \text{sen} \epsilon_{220q}) \quad (17)$$

Para simplificar el tratamiento del problema, por un lado se van a considerar sólo los términos seculares, es decir aquellos para los cuales $q = j$.

Para simplificar el tratamiento del problema, por un lado se van a considerar sólo los términos seculares, es decir aquellos para los cuales $q = j$. Por lo tanto, la Ec. (16) toma la forma:

Para simplificar el tratamiento del problema, por un lado se van a considerar sólo los términos seculares, es decir aquellos para los cuales $q = j$. Por lo tanto, la Ec. (16) toma la forma:

$$\frac{da}{dt} = -3 \frac{GM_s R^5}{na^7} G_{200}^2(e) k_2 \sin \epsilon_{2200} \quad (18)$$

Para simplificar el tratamiento del problema, por un lado se van a considerar sólo los términos seculares, es decir aquellos para los cuales $q = j$. Por lo tanto, la Ec. (16) toma la forma:

$$\frac{da}{dt} = -3 \frac{GM_s R^5}{na^7} G_{200}^2(e) k_2 \sin \epsilon_{2200} \quad (18)$$

Efroimsky & Lainey (2007):

“cualquier modelo de la interacción de mareas está basado en una hipótesis específica de cómo el desfase —entre el esfuerzo y la deformación, o bien, entre la excitación y la respuesta, reflejada en el cambio del potencial gravitatorio adicional del planeta, ϵ_l — depende de la frecuencia de las mareas”.

Para simplificar el tratamiento del problema, por un lado se van a considerar sólo los términos seculares, es decir aquellos para los cuales $q = j$. Por lo tanto, la Ec. (16) toma la forma:

$$\frac{da}{dt} = -3 \frac{GM_s R^5}{na^7} G_{200}^2(e) k_2 \sin \epsilon_{2200} \quad (18)$$

Efroimsky & Lainey (2007):

“cualquier modelo de la interacción de mareas está basado en una hipótesis específica de cómo el desfase —entre el esfuerzo y la deformación, o bien, entre la excitación y la respuesta, reflejada en el cambio del potencial gravitatorio adicional del planeta, ϵ_l — depende de la frecuencia de las mareas”. Para el caso estudiado:

$$\epsilon_2(\omega_{2200}) = \omega_{2200} \Delta t_2(\omega_{2200})$$

donde,

$$\omega_{2200} = 2(n - \dot{\theta})$$

La expresión del desfase puede expresarse de forma equivalente como:

$$\begin{aligned}\epsilon_2(\omega_{2200}) &= |\omega_{2200}| \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200}) \\ &= \chi_{2200} \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200})\end{aligned}\tag{19}$$

La expresión del desfase puede expresarse de forma equivalente como:

$$\begin{aligned}\epsilon_2(\omega_{2200}) &= |\omega_{2200}| \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200}) \\ &= \chi_{2200} \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200})\end{aligned}\tag{19}$$

donde χ es la frecuencia física (real) a la cual se aplican los esfuerzos.

La expresión del desfase puede expresarse de forma equivalente como:

$$\begin{aligned}\epsilon_2(\omega_{2200}) &= |\omega_{2200}| \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200}) \\ &= \chi_{2200} \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200})\end{aligned}\tag{19}$$

donde χ es la frecuencia física (real) a la cual se aplican los esfuerzos.

Efroimsky & Lainey (2007) discuten tres modelos reológicos, dos de ellos ampliamente utilizados en la literatura.

La expresión del desfase puede expresarse de forma equivalente como:

$$\begin{aligned}\epsilon_2(\omega_{2200}) &= |\omega_{2200}| \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200}) \\ &= \chi_{2200} \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200})\end{aligned}\tag{19}$$

donde χ es la frecuencia física (real) a la cual se aplican los esfuerzos.

Efroimsky & Lainey (2007) discuten tres modelos reológicos, dos de ellos ampliamente utilizados en la literatura.

- Kaula (1964): k_2 y ϵ_2 constantes.

La expresión del desfase puede expresarse de forma equivalente como:

$$\begin{aligned}\epsilon_2(\omega_{2200}) &= |\omega_{2200}| \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200}) \\ &= \chi_{2200} \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200})\end{aligned}\tag{19}$$

donde χ es la frecuencia física (real) a la cual se aplican los esfuerzos.

Efroimsky & Lainey (2007) discuten tres modelos reológicos, dos de ellos ampliamente utilizados en la literatura.

- Kaula (1964): k_2 y ϵ_2 constantes.
 - La respuesta del planeta es independiente tanto de la frecuencia como de la amplitud del esfuerzo aplicado.

La expresión del desfase puede expresarse de forma equivalente como:

$$\begin{aligned}\epsilon_2(\omega_{2200}) &= |\omega_{2200}| \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200}) \\ &= \chi_{2200} \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200})\end{aligned}\tag{19}$$

donde χ es la frecuencia física (real) a la cual se aplican los esfuerzos.

Efroimsky & Lainey (2007) discuten tres modelos reológicos, dos de ellos ampliamente utilizados en la literatura.

- Kaula (1964): k_2 y ϵ_2 constantes.
 - La respuesta del planeta es independiente tanto de la frecuencia como de la amplitud del esfuerzo aplicado.
 - La Ec. (18) es integrable analíticamente.

La expresión del desfase puede expresarse de forma equivalente como:

$$\begin{aligned}\epsilon_2(\omega_{2200}) &= |\omega_{2200}| \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200}) \\ &= \chi_{2200} \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200})\end{aligned}\tag{19}$$

donde χ es la frecuencia física (real) a la cual se aplican los esfuerzos.

Efroimsky & Lainey (2007) discuten tres modelos reológicos, dos de ellos ampliamente utilizados en la literatura.

- Kaula (1964): k_2 y ϵ_2 constantes.
 - La respuesta del planeta es independiente tanto de la frecuencia como de la amplitud del esfuerzo aplicado.
 - La Ec. (18) es integrable analíticamente.
- Singer (1968) y Mignard (1979, 1980): k_2 y Δt_2 constantes.

La expresión del desfase puede expresarse de forma equivalente como:

$$\begin{aligned}\epsilon_2(\omega_{2200}) &= |\omega_{2200}| \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200}) \\ &= \chi_{2200} \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200})\end{aligned}\tag{19}$$

donde χ es la frecuencia física (real) a la cual se aplican los esfuerzos.

Efroimsky & Lainey (2007) discuten tres modelos reológicos, dos de ellos ampliamente utilizados en la literatura.

- Kaula (1964): k_2 y ϵ_2 constantes.
 - La respuesta del planeta es independiente tanto de la frecuencia como de la amplitud del esfuerzo aplicado.
 - La Ec. (18) es integrable analíticamente.
- Singer (1968) y Mignard (1979, 1980): k_2 y Δt_2 constantes. Implica que $\epsilon_2 \propto \chi_{2200}$.

La expresión del desfase puede expresarse de forma equivalente como:

$$\begin{aligned}\epsilon_2(\omega_{2200}) &= |\omega_{2200}| \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200}) \\ &= \chi_{2200} \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \Delta t_2(\omega_{2200})\end{aligned}\quad (19)$$

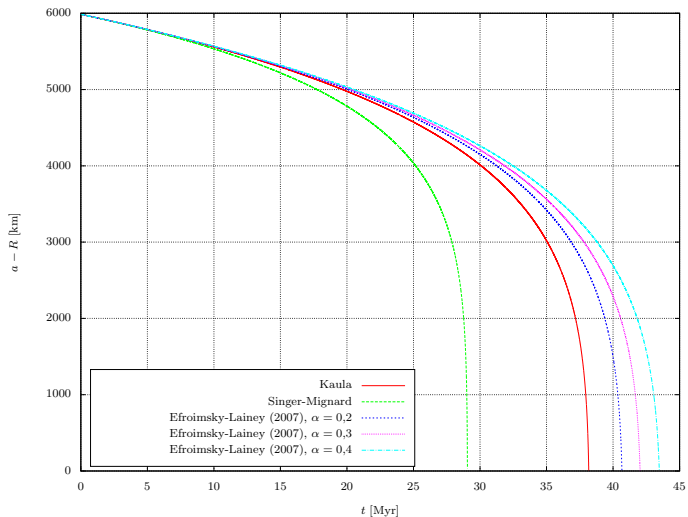
donde χ es la frecuencia física (real) a la cual se aplican los esfuerzos.

Efroimsky & Lainey (2007) discuten tres modelos reológicos, dos de ellos ampliamente utilizados en la literatura.

- Kaula (1964): k_2 y ϵ_2 constantes.
 - La respuesta del planeta es independiente tanto de la frecuencia como de la amplitud del esfuerzo aplicado.
 - La Ec. (18) es integrable analíticamente.
- Singer (1968) y Mignard (1979, 1980): k_2 y Δt_2 constantes. Implica que $\epsilon_2 \propto \chi_{2200}$.
- Pero, los modelos anteriores no son validados por la experiencia, por lo que favorecen la utilización de una ley exponencial:

$$\epsilon_2 \propto \chi_{2200}^{-\alpha}$$

Evolución temporal del semieje mayor de la órbita de Fobos



Dado que este problema es esencialmente dinámico, la Ec. (4) debe escribirse:

$$V_l(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \hat{k}_l(t) W_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t') \quad (20)$$

Dado que este problema es esencialmente dinámico, la Ec. (4) debe escribirse:

$$V_l(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \hat{k}_l(t) W_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t') \quad (20)$$

Resulta conveniente trabajar en el dominio de la frecuencia en lugar del tiempo.

Dado que este problema es esencialmente dinámico, la Ec. (4) debe escribirse:

$$V_l(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \hat{k}_l(t) W_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t') \quad (20)$$

Resulta conveniente trabajar en el dominio de la frecuencia en lugar del tiempo. En función de la frecuencia, la Ec. (20) toma la forma:

$$\bar{V}_l(\chi) = \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \bar{k}_l(\chi) \bar{W}_l(\chi) \quad (21)$$

donde

$$\bar{k}_l(\chi) = \int_0^\infty \dot{k}_l(\tau) e^{-i\chi\tau} d\tau; \quad \tau = t - t' \quad (22)$$

En virtud del principio de correspondencia elástica-viscoelástica, los números de Love complejos están dados ahora por:

$$\bar{k}_l(\chi) = \frac{3}{2(l-1)} \frac{1}{1 + A_l \bar{\mu}(\chi)} = \frac{3}{2(l-1)} \frac{\bar{J}(\chi)}{\bar{J}(\chi) + A_l} \quad (23)$$

En virtud del principio de correspondencia elástica-viscoelástica, los números de Love complejos están dados ahora por:

$$\bar{k}_l(\chi) = \frac{3}{2(l-1)} \frac{1}{1 + A_l \bar{\mu}(\chi)} = \frac{3}{2(l-1)} \frac{\bar{J}(\chi)}{\bar{J}(\chi) + A_l} \quad (23)$$

$$\bar{k}_l(\chi) = \mathcal{R}e [\bar{k}_l(\chi)] + i \mathcal{I}m [\bar{k}_l(\chi)] = |\bar{k}_l(\chi)| e^{-i \epsilon_l(\chi)} \quad (24)$$

En virtud del principio de correspondencia elástica-viscoelástica, los números de Love complejos están dados ahora por:

$$\bar{k}_l(\chi) = \frac{3}{2(l-1)} \frac{1}{1 + A_l \bar{\mu}(\chi)} = \frac{3}{2(l-1)} \frac{\bar{J}(\chi)}{\bar{J}(\chi) + A_l} \quad (23)$$

$$\bar{k}_l(\chi) = \mathcal{R}e [\bar{k}_l(\chi)] + i \mathcal{I}m [\bar{k}_l(\chi)] = |\bar{k}_l(\chi)| e^{-i \epsilon_l(\chi)} \quad (24)$$

En consecuencia:

$$k_l(\chi) \cos \epsilon_l(\chi) = \mathcal{R}e [\bar{k}_l(\chi)] \quad (25a)$$

$$k_l(\chi) \sin \epsilon_l(\chi) = -\mathcal{I}m [\bar{k}_l(\chi)] \quad (25b)$$

donde, por motivos de simplicidad, se escribió $k_l(\chi) = |\bar{k}_l(\chi)|$.

En virtud del principio de correspondencia elástica-viscoelástica, los números de Love complejos están dados ahora por:

$$\bar{k}_l(\chi) = \frac{3}{2(l-1)} \frac{1}{1 + A_l \bar{\mu}(\chi)} = \frac{3}{2(l-1)} \frac{\bar{J}(\chi)}{\bar{J}(\chi) + A_l} \quad (23)$$

$$\bar{k}_l(\chi) = \mathcal{R}e [\bar{k}_l(\chi)] + i \mathcal{I}m [\bar{k}_l(\chi)] = |\bar{k}_l(\chi)| e^{-i \epsilon_l(\chi)} \quad (24)$$

En consecuencia:

$$k_l(\chi) \cos \epsilon_l(\chi) = \mathcal{R}e [\bar{k}_l(\chi)] \quad (25a)$$

$$k_l(\chi) \sin \epsilon_l(\chi) = -\mathcal{I}m [\bar{k}_l(\chi)] \quad (25b)$$

donde, por motivos de simplicidad, se escribió $k_l(\chi) = |\bar{k}_l(\chi)|$.

Luego, las expresiones de los factores dados en las Ecs. (25) son:

$$k_l(\chi) \cos \epsilon_l(\chi) = \frac{3}{2(l-1)} \frac{(\mathcal{R}(\chi) + A_l \chi \tau_M) \mathcal{R}(\chi) + (\mathcal{I}(\chi))^2}{(\mathcal{R}(\chi) + A_l \chi \tau_M)^2 + (\mathcal{I}(\chi))^2} \quad (26a)$$

$$k_l(\chi) \sin \epsilon_l(\chi) = -\frac{3}{2(l-1)} \frac{A_l \chi \tau_M \mathcal{I}(\chi)}{(\mathcal{R}(\chi) + A_l \chi \tau_M)^2 + (\mathcal{I}(\chi))^2} \operatorname{sgn}(\omega_{lmpq}) \quad (26b)$$

La expresión de $\bar{J}(\chi)$ se obtiene de la ecuación constitutiva correspondiente al modelo elegido para describir el comportamiento del material que conforma al planeta.

La expresión de $\bar{J}(\chi)$ se obtiene de la ecuación constitutiva correspondiente al modelo elegido para describir el comportamiento del material que conforma al planeta. Para el caso de que se considere un material incompresible, en función del tiempo la ecuación constitutiva se escribe de forma general como:

$$2u_{\gamma\nu}(t) = \hat{J}(t) \sigma_{\gamma\nu}(t) \quad (27)$$

La expresión de $\bar{J}(\chi)$ se obtiene de la ecuación constitutiva correspondiente al modelo elegido para describir el comportamiento del material que conforma al planeta. Para el caso de que se considere un material incompresible, en función del tiempo la ecuación constitutiva se escribe de forma general como:

$$2u_{\gamma\nu}(t) = \hat{J}(t) \sigma_{\gamma\nu}(t) \quad (27)$$

Por lo tanto, la ecuación constitutiva (27) se escribe en función de la frecuencia como:

$$2\bar{u}_{\gamma\nu}(\chi) = \bar{J}(\chi) \bar{\sigma}_{\gamma\nu}(\chi) \quad (28)$$

donde

$$\bar{J}(\chi) = \int_0^{\infty} \dot{J}(\tau) e^{-i\chi\tau} d\tau \quad (29)$$

Además:

$$J(t - t') = J(0)\Theta(t - t') + \text{términos viscosos y hereditarios} \quad (30)$$

Reología de Andrade:

$$\bar{J}(\chi) = J \left[1 - i (\chi \tau_M)^{-1} + (i \chi \tau_A)^{-\alpha} \Gamma(1 + \alpha) \right] \quad (31)$$

Reología de Andrade:

$$\bar{J}(\chi) = J \left[1 - i(\chi \tau_M)^{-1} + (i \chi \tau_A)^{-\alpha} \Gamma(1 + \alpha) \right] \quad (31)$$

Luego:

$$\mathcal{R}(\chi) = \chi \tau_M + \chi^{1-\alpha} \tau_M \tau_A^{-\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(1 + \alpha) \quad (32a)$$

$$\mathcal{I}(\chi) = -1 - \chi^{1-\alpha} \tau_M \tau_A^{-\alpha} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(1 + \alpha) \quad (32b)$$

Reología de Andrade:

$$\bar{J}(\chi) = J \left[1 - i(\chi \tau_M)^{-1} + (i \chi \tau_A)^{-\alpha} \Gamma(1 + \alpha) \right] \quad (31)$$

Luego:

$$\mathcal{R}(\chi) = \chi \tau_M + \chi^{1-\alpha} \tau_M \tau_A^{-\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(1 + \alpha) \quad (32a)$$

$$\mathcal{I}(\chi) = -1 - \chi^{1-\alpha} \tau_M \tau_A^{-\alpha} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(1 + \alpha) \quad (32b)$$

Para el caso particular considerado, se tiene:

$$k_2 \sin \epsilon_{2200} = -\frac{3}{2} \frac{A_2 \chi \tau_M \mathcal{I}(\chi)}{(\mathcal{R}(\chi) + A_2 \chi \tau_M)^2 + \mathcal{I}(\chi)^2} \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \quad (33)$$

donde

$$A_2 = \frac{38}{3} \frac{\pi \mu R^4}{\mathcal{G} M_p^2}; \quad y \quad \tau_M = \frac{\eta}{\mu} \quad (34)$$

Reología de Andrade:

$$\bar{J}(\chi) = J \left[1 - i(\chi \tau_M)^{-1} + (i \chi \tau_A)^{-\alpha} \Gamma(1 + \alpha) \right] \quad (31)$$

Luego:

$$\mathcal{R}(\chi) = \chi \tau_M + \chi^{1-\alpha} \tau_M \tau_A^{-\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(1 + \alpha) \quad (32a)$$

$$\mathcal{I}(\chi) = -1 - \chi^{1-\alpha} \tau_M \tau_A^{-\alpha} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(1 + \alpha) \quad (32b)$$

Para el caso particular considerado, se tiene:

$$k_2 \sin \epsilon_{2200} = -\frac{3}{2} \frac{A_2 \chi \tau_M \mathcal{I}(\chi)}{(\mathcal{R}(\chi) + A_2 \chi \tau_M)^2 + \mathcal{I}(\chi)^2} \operatorname{sgn}(\omega_{2200}) \quad (33)$$

donde

$$A_2 = \frac{38}{3} \frac{\pi \mu R^4}{\mathcal{G} M_p^2}; \quad y \quad \tau_M = \frac{\eta}{\mu} \quad (34)$$

Dentro del régimen de frecuencias de este problema, puede considerarse que $\tau_A \approx \tau_M$ y, por lo tanto, los únicos parámetros libres de la reología de Marte son τ_M y α .

En una primera aproximación al problema, se resolvió numéricamente la Ec. (18) junto con las Ecs. (33), (34) y (32), es decir:

$$\dot{a} = \frac{9}{2} \frac{\mathcal{G}M_s R^5}{na^7} G_{200}^2(e) \frac{A_2 \chi_{2200} \tau_M [-\mathcal{I}(\chi)]}{(\mathcal{R}(\chi) + A_2 \chi_{2200} \tau_M)^2 + \mathcal{I}(\chi)^2} \text{sgn}(\omega_{2200})$$

En una primera aproximación al problema, se resolvió numéricamente la Ec. (18) junto con las Ecs. (33), (34) y (32), es decir:

$$\dot{a} = \frac{9}{2} \frac{\mathcal{G}M_s R^5}{na^7} G_{200}^2(e) \frac{A_2 \chi_{2200} \tau_M [-\mathcal{I}(\chi)]}{(\mathcal{R}(\chi) + A_2 \chi_{2200} \tau_M)^2 + \mathcal{I}(\chi)^2} \operatorname{sgn}(\omega_{2200})$$

donde

$$A_2 = \frac{38}{3} \frac{\pi \mu R^4}{\mathcal{G}M_p^2}$$

y

$$\chi_{2200} = |\omega_{2200}| = 2|n - \dot{\theta}|$$

En una primera aproximación al problema, se resolvió numéricamente la Ec. (18) junto con las Ecs. (33), (34) y (32), es decir:

$$\dot{a} = \frac{9}{2} \frac{\mathcal{G}M_s R^5}{na^7} G_{200}^2(e) \frac{A_2 \chi_{2200} \tau_M [-\mathcal{I}(\chi)]}{(\mathcal{R}(\chi) + A_2 \chi_{2200} \tau_M)^2 + \mathcal{I}(\chi)^2} \operatorname{sgn}(\omega_{2200})$$

donde

$$A_2 = \frac{38}{3} \frac{\pi \mu R^4}{\mathcal{G}M_p^2}$$

y

$$\chi_{2200} = |\omega_{2200}| = 2|n - \dot{\theta}|$$

además,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\chi) &= \chi \tau_M + (\chi \tau_M)^{1-\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(1+\alpha) \\ -\mathcal{I}(\chi) &= 1 + (\chi \tau_M)^{1-\alpha} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(1+\alpha); \end{aligned}$$

En una primera aproximación al problema, se resolvió numéricamente la Ec. (18) junto con las Ecs. (33), (34) y (32), es decir:

$$\dot{a} = \frac{9}{2} \frac{\mathcal{G}M_s R^5}{na^7} G_{200}^2(e) \frac{A_2 \chi_{2200} \tau_M [-\mathcal{I}(\chi)]}{(\mathcal{R}(\chi) + A_2 \chi_{2200} \tau_M)^2 + \mathcal{I}(\chi)^2} \text{sgn}(\omega_{2200})$$

donde

$$A_2 = \frac{38}{3} \frac{\pi \mu R^4}{\mathcal{G}M_p^2}$$

y

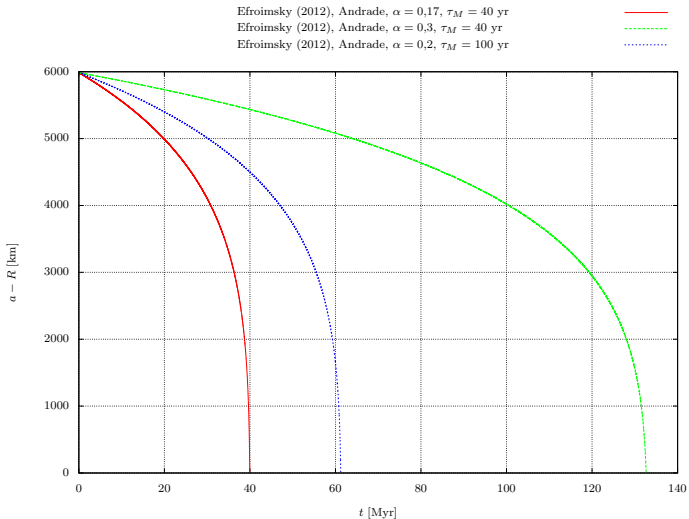
$$\chi_{2200} = |\omega_{2200}| = 2|n - \dot{\theta}|$$

además,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\chi) &= \chi \tau_M + (\chi \tau_M)^{1-\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(1+\alpha) \\ -\mathcal{I}(\chi) &= 1 + (\chi \tau_M)^{1-\alpha} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(1+\alpha); \end{aligned}$$

utilizando distintos valores de τ_M y de α .

Planteo del problema



Dos dificultades:

Dos dificultades:

- No se conocen con gran precisión los valores de los parámetros reológicos de Marte.

Dos dificultades:

- No se conocen con gran precisión los valores de los parámetros reológicos de Marte.
- No existe determinación directa del valor actual de \dot{a} .

Dos dificultades:

- No se conocen con gran precisión los valores de los parámetros reológicos de Marte.
- No existe determinación directa del valor actual de \dot{a} . Lainey et al. (2007) estiman aproximadamente 3,85 cm/año

Ante esta situación, se decidió proceder de la siguiente manera:

Ante esta situación, se decidió proceder de la siguiente manera:

- Generar una grilla de valores posibles de α y de τ_M . Los intervalos correspondientes son $[0,1; 0,4]$ y $[0,0; 200,0]$, respectivamente, los cuales fueron divididos en los respectivos subintervalos $\Delta\alpha = 10^{-3}$ y $\Delta\tau_M = 10$ años.

Ante esta situación, se decidió proceder de la siguiente manera:

- Generar una grilla de valores posibles de α y de τ_M . Los intervalos correspondientes son $[0,1; 0,4]$ y $[0,0; 200,0]$, respectivamente, los cuales fueron divididos en los respectivos subintervalos $\Delta\alpha = 10^{-3}$ y $\Delta\tau_M = 10$ años.
- Utilizando dichos valores de la grilla, se obtuvieron valores de la pendiente inicial $(da/dt)_0$ —utilizando el modelo de Andrade— evaluando la Ec. (18) junto con las Ecs. (33), (34) y (32).

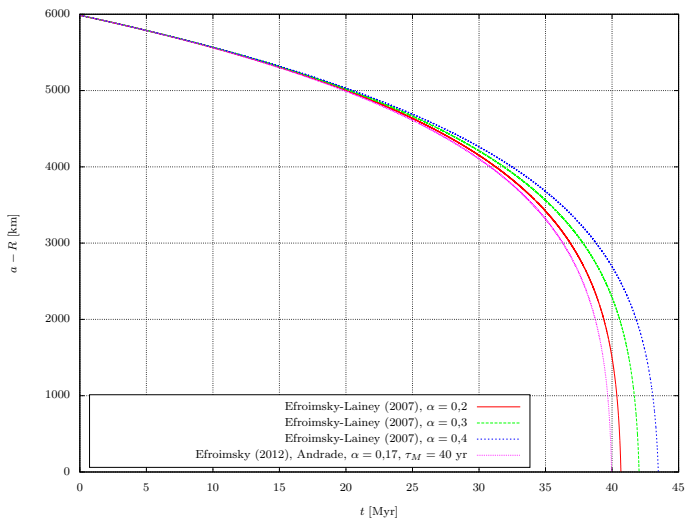
Ante esta situación, se decidió proceder de la siguiente manera:

- Generar una grilla de valores posibles de α y de τ_M . Los intervalos correspondientes son $[0,1; 0,4]$ y $[0,0; 200,0]$, respectivamente, los cuales fueron divididos en los respectivos subintervalos $\Delta\alpha = 10^{-3}$ y $\Delta\tau_M = 10$ años.
- Utilizando dichos valores de la grilla, se obtuvieron valores de la pendiente inicial $(da/dt)_0$ —utilizando el modelo de Andrade— evaluando la Ec. (18) junto con las Ecs. (33), (34) y (32).
- Por último, se buscó el valor mínimo de $|(da/dt)_0 - 38,5|$ el cual corresponde al par de valores $\alpha = 0,17$ y $\tau_M = 40$ años.

Ante esta situación, se decidió proceder de la siguiente manera:

- Generar una grilla de valores posibles de α y de τ_M . Los intervalos correspondientes son $[0,1; 0,4]$ y $[0,0; 200,0]$, respectivamente, los cuales fueron divididos en los respectivos subintervalos $\Delta\alpha = 10^{-3}$ y $\Delta\tau_M = 10$ años.
- Utilizando dichos valores de la grilla, se obtuvieron valores de la pendiente inicial $(da/dt)_0$ —utilizando el modelo de Andrade— evaluando la Ec. (18) junto con las Ecs. (33), (34) y (32).
- Por último, se buscó el valor mínimo de $|(da/dt)_0 - 38,5|$ el cual corresponde al par de valores $\alpha = 0,17$ y $\tau_M = 40$ años.

Tomando entonces estos últimos valores de α y τ_M , se resolvió numéricamente las mismas ecuaciones antes presentadas.





Si el valor más aceptado de la tasa actual de descenso de Fobos es el correcto

Si el valor más aceptado de la tasa actual de descenso de Fobos es el correcto, entonces, de los resultados obtenidos, puede concluirse que:

- El valor de $\alpha = 0,17$ corresponde al de un material parcialmente fundido.



Si el valor más aceptado de la tasa actual de descenso de Fobos es el correcto, entonces, de los resultados obtenidos, puede concluirse que:

- El valor de $\alpha = 0,17$ corresponde al de un material parcialmente fundido. Esto es consistente con las hipótesis acerca de la estructura interna de Marte.

Si el valor más aceptado de la tasa actual de descenso de Fobos es el correcto, entonces, de los resultados obtenidos, puede concluirse que:

- El valor de $\alpha = 0,17$ corresponde al de un material parcialmente fundido. Esto es consistente con las hipótesis acerca de la estructura interna de Marte.
 - Núcleo total o parcialmente fundido de unos 1794 km de radio (Rivoldini et al., 2011).

Si el valor más aceptado de la tasa actual de descenso de Fobos es el correcto, entonces, de los resultados obtenidos, puede concluirse que:

- El valor de $\alpha = 0,17$ corresponde al de un material parcialmente fundido. Esto es consistente con las hipótesis acerca de la estructura interna de Marte.
 - Núcleo total o parcialmente fundido de unos 1794 km de radio (Rivoldini et al., 2011).
- En virtud de la definición del tiempo de Maxwell, $\tau_M = \eta/\mu$, puede usarse el correspondiente valor obtenido (40 años) para estimar el valor de la viscosidad del manto de Marte, habiendo asumido un valor de su rigidez media, o viceversa. Se obtuvo en este trabajo: $\eta \simeq 1,26 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Si el valor más aceptado de la tasa actual de descenso de Fobos es el correcto, entonces, de los resultados obtenidos, puede concluirse que:

- El valor de $\alpha = 0,17$ corresponde al de un material parcialmente fundido. Esto es consistente con las hipótesis acerca de la estructura interna de Marte.
 - Núcleo total o parcialmente fundido de unos 1794 km de radio (Rivoldini et al., 2011).
- En virtud de la definición del tiempo de Maxwell, $\tau_M = \eta/\mu$, puede usarse el correspondiente valor obtenido (40 años) para estimar el valor de la viscosidad del manto de Marte, habiendo asumido un valor de su rigidez media, o viceversa. Se obtuvo en este trabajo: $\eta \simeq 1,26 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.
- La similitud entre los resultados obtenidos en este trabajo y aquellos obtenidos por Efroimsky & Lainey (2007), usando $\alpha = 0,2$, puede entenderse teniendo en cuenta que el mecanismo de disipación dado por la ley exponencial ($\sin \epsilon \propto \chi^{-\alpha}$) es más efectivo en la corteza, la cual, para el caso de Marte, es de unos 50 km, el cual es similar al la de la Tierra, pero se debe tener en cuenta que $R_{\text{♂}}/R_{\text{♁}} \approx 0,53$.

- Efroimsky M., Lainey V., 2007, *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 112, E12003
- Efroimsky M., Williams J. G., 2009, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 104, 257
- Kaula W. M., 1961, *Geophysical Journal*, 5, 104
- Kaula W. M., 1964, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 2, 661
- Lainey V., Dehant V., Pätzold M., 2007, *Astronomy and Astrophysics*, 465, 1075
- Mignard F., 1979, *Moon and Planets*, 20, 301
- Mignard F., 1980, *Moon and Planets*, 23, 185
- Rivoldini A., et al., 2011, *Icarus*, 213, 451
- Singer S. F., 1968, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 15, 205

